CONCOURS BLANC 1 ÉPREUVE 1

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

EXERCICE 1 **EML** 2024 Exercice 1.

On considère les matrices carrés d'ordre deux suivantes :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

Partie A : Étude de A et de $\mathcal{C}$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Justifier que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. **a.** Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathcal{C}$.

5. Soit M et N deux matrices quelconque de $\mathcal{C}$.

a. Montrer que le produit MN appartient à $\mathcal{C}$.

b. Montrer que M et N commutent, c'est-à-dire que $MN = NM$.

6. Soit M une matrice non nulle de $\mathcal{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathcal{C}$.

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathcal{C}$.

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :

$$P(x) = x^2 + ux + v \qquad \text{avec } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant.

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{C}$ telle que $P(M) = 0_2$.

7. Soit $M = aI_2 + bA$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a. Montrer que $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.

b. En déduire :

$$P(M) = 0_2 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2ab + ub & = & 0 \end{array} \right. .$$

8. Dans cette question on montre que le système ci-dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en distinguant deux cas :

a. Si $\Delta \geqslant 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.

b. Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution (a, b) avec $b \neq 0$.

9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

Date: 2 Décembre 2024 08h30-12h30.

http://louismerlin.fr.

Partie C : Un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AMA.$$

On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

11. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que l'endomorphisme φ est bijectif, et donner φ^{-1}.

12. **a.** Calculer $\varphi(E_1), \cdots, \varphi(E_4)$, puis donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Justifier sans calcul que B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}$.

c. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

Exercice 2 **EML** 2024 Exercice 3.

Soit N un entier supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule au k-ième tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1, N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéro distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéro distincts lors des k premier tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : On suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.

2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction "ajout" qui prend en argument une liste L et un entier x.

```python
def ajout(L,x) :
  if (x in L ) == False :
    L.append(x)
```

Expliquer succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande ajout(L,x) modifie la liste L.

3. Recopier et compléter la fonction Simul_T ci-dessous. cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons

- L la liste sans répétition des numéros sorties lors des tirages effectués ;
- k le rang du tirage en cours ;
- x le résultat du tirage en cours.

```python
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
  L = []
  k = 0
  while ..... :
    x = rd.randint(1,N+1)
    ajout(L,x)
    k = ......
  return(......)
```

4. On suppose $N = 3$.

Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de Simul_T(3,2). Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules. Dans cette partie, on suppose $N = 3$. Ainsi, l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.

6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.

a. Décrire l'événement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des événements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.

b. En déduire $\mathbb{P}((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}$.

7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.

8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.

Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général. On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.

Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}.$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires après le T_{i-1}-ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i-1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, \cdots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

a. Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-i+1}{N}$.

b. Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et de N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.

10. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \cdots, Z_i$.

Loi de T_3.

11. a. Calculer $\mathbb{P}((Z_2 = l) \cap (Z_3 = k))$ pour tous l et k dans $\mathbb{N}^*$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right).$$

c. Déterminer la loi de T_3.

Espérance et covariance.

12. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Montrer que $E(T_i) = N \sum\limits_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$.

13. Soit i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$. Montrer que

$$\text{Cov}(T_i, T_j) = V(T_i),$$

où $\text{Cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j.

Exercice 3 **EDHEC** 2024 Exercice 3.
On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t)dt \quad (\star).$$

1. Montrer que l'égalité $(\star)$ est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u)du \quad (\star\star).$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x f(u)du.$$

b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(x).$$

c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

d. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question **2.d** est la seule solution du problème posé en début d'exercice.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x t f(x-t)dt.$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.